第五届全国大学生数学竞赛试卷（数学类，2013）

陈洪葛　编辑

2013 年 10 月 31 日

一、（本题15分）平面$\mathbb{R}^2$上两个半径为r的圆C_1和C_2外切于P点。将圆C_2沿C_1的圆周（无滑动）滚动一周，这时，C_2上的P点也随C_2的运动而运动。记Γ为P点的运动轨迹曲线，称为心脏线。现设C为以P的初始位置（切点）为圆心的圆，其半径为R。记$\gamma:\mathbb{R}^2\cup\{\infty\}\to\mathbb{R}^2\cup\{\infty\}$为圆$C$的反演变换，它将$Q\in\mathbb{R}^2\setminus\{P\}$映成射线$PQ$上的点$Q'$,满足$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ'}=R^2$。求证：$\gamma(\Gamma)$为抛物线。

二、（本题10分）设n阶方阵$B(t)$和$n\times 1$矩阵$b(t)$分别为$B(t)=(b_{ij}(t))$和$b(t)=\begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t)\end{pmatrix}$,其中$b_{ij}(t),b_i(t)$均为关于$t$的实系数多项式，$i,j=1,2,\cdots,n$。记$d(t)$为$B(t)$的行列式，$d_i(t)$为用$b(t)$替代$B(t)$的第$i$列后所得的$n$阶矩阵的行列式。若$d(t)$有实根$t_0$使得$B(t_0)X=b(t_0)$成为关于$X$的相容线性方程组，试证明：$d(t),d_1(t),\cdots,d_n(t)$必有次数$\geq 1$的公因式。

三、（本题15分）设$f(x)$在区间$[0,a]$上有二阶连续导数，$f'(0)=1,f''(0)\neq 0$,且$0<f(x)<x,x\in(0,a)$。令

$$x_{n+1}=f(x_n),\qquad x_1\in(0,a)$$

1. 求证$\{x_n\}$收敛并求极限；
2. 试问$\{nx_n\}$是否收敛?若不收敛，则说明理由。若收敛，则求其极限。

四、（本题15分）设$a>1$,函数$f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$可微。求证存在趋于无穷的正数列$\{x_n\}$使得

$$f'(x_n)<f(ax_n),\qquad n=1,2,\cdots.$$

五、（本题20分）设$f:[-1,1]\to\mathbb{R}$为偶函数，f在$[0,1]$上单调递增，又设g是$[-1,1]$上的凸函数，即对任意$x,y\in[-1,1]$及$t\in(0,1)$有

$$g(tx+(1-t)y)\le tg(x)+(1-t)g(y).$$

求证：

$$2\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx\ge\int_{-1}^{1}f(x)dx\int_{-1}^{1}g(x)dx.$$

六、（本题25分）设$\mathbb{R}^{n\times n}$为n阶实方阵全体，E_{ij}为(i,j)位置元素为1其余位置元素为0的n阶方阵，$i,j=1,2,\cdots,n$。让Γ_r为秩等于r的实n阶方阵全体，$r=0,1,2,\cdots,n$，并让$\phi:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$为可乘映照，即满足：

$$\phi(AB)=\phi(A)\phi(B),\quad\forall A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

试证明:

1. $\forall A,B\in\Gamma_r$，秩$\phi(A)=\phi(B)$。
2. 若$\phi(0)=0$，且存在某个秩为1的矩阵W使得$\phi(W)\ne0$,则必存在可逆方阵R使得$\phi(E_{ij})=RE_{ij}R^{-1}$对一切$E_{ij}$皆成立，$i,j=1,2,\cdots,n$。