

第五届全国大学生数学竞赛试卷（非数学类，2013）

陈洪葛 编辑

2013年10月31日

一、（本题共4小题，每小题各6分，共24分）解答下列各题。

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \pi \sqrt{1 + 4n^2}\right)^n$

2. 证明广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 不是绝对收敛的。

3. 设函数 $y = y(x)$ 由 $x^3 + 3x^2y - 2y^3 = 2$ 所确定，求 $y(x)$ 的极值。

4. 过曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ ($x \geq 0$) 上的点 A 作切线，使该切线与曲线 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\frac{3}{4}$ ，求点 A 的坐标。

二、（本题12分）计算定积分

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx$$

三、（本题12分）设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处存在二阶导数，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 。证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|$ 收敛。

四、（本题10分）（缺）

五、（本题14分）设 Σ 是一个光滑封闭曲面，方向朝外。给定第二型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x^3 - x) dydz + (2y^3 - y) dzdx + (3z^3 - z) dxdy$$

六、(本题14分) 设 $I_a(r) = \int_C \frac{ydx - xdy}{(x^2 + y^2)^a}$, 其中 a 为常数, 曲线 C 为椭圆 $x^2 + xy + y^2 = r^2$, 取正向, 求极限 $\lim_{r \rightarrow +\infty} I_a(r)$.

七、(本题14分) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性, 若收敛, 求其和。